

NUMERI COMPLESSI

1. Introduzione

È ben noto che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (che include tutti gli altri insiemi numerici finora incontrati in questo corso) non è sufficientemente "ampio" da permettere la risoluzione di equazioni, anche semplici, a coefficienti reali, come ad esempio $x^2 + 1 = 0$. Per risolvere questo problema vengono introdotti i numeri complessi.

2. Vettori e numeri complessi

Considerato un sistema di assi cartesiani ortogonali, un vettore $\vec{A}$ avente un estremo nell'origine del sistema stesso può essere individuato univocamente dalle sue coordinate geometriche.

Tuttavia, ai fini di semplificare la trattazione analitica, può essere utilizzato un sistema di assi coordinati, sempre ortogonali, in cui l'asse orizzontale è graduato in unità reali (numeri reali 1, 2, 3 ...) e per tale motivo detto asse reale (indicato con +1, anziché con x), e l'asse verticale in unità immaginarie (numeri immaginari j1, j2, j3, ...), denominato asse immaginario (indicato con +j, anziché con y).

In tale sistema di riferimento il vettore $\vec{A}$ è definito univocamente dall'espressione:

$$\vec{A} = a_1 + ja_2 \quad (1)$$

essendo (figura 1) a_1 la componente dell'asse reale (**componente o parte reale**) e ja_2 (**componente o parte immaginaria**).

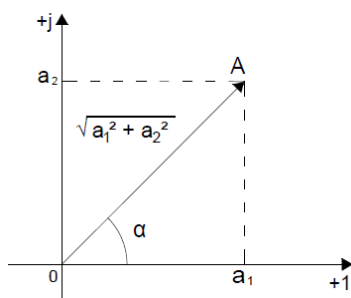


Figura 1 - Rappresentazione simbolica di un vettore

Il vettore A è pertanto individuato dall'entità $a_1 + ja_2$, che in analisi matematica costituisce un numero complesso in **forma binomia**, avente modulo e argomento rispettivamente indicati con $|\vec{A}|$ e $\arg |\vec{A}|$:

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \alpha = \arg \vec{A} = \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1}$$

È importante sottolineare che le quantità a_1 e a_2 sono numeri reali e che il simbolo j è per definizione la radice quadrata dell'unità negativa, cioè:

$$j = \sqrt{-1} \quad (3)$$

j è denominato **unità immaginaria** e ha della proprietà di trasformare in un numero immaginario qualsiasi numero reale (positivo o negativo).

Ad esempio, una quantità reale m è reale e quindi sta sull'asse reale, la quantità jm è immaginaria e quindi sta sull'asse immaginario (figura 2).

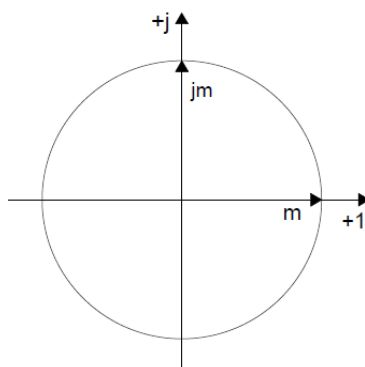


Figura 2 – Significato del simbolo j

L'effetto prodotto del simbolo j è la rotazione del vettore m di $\pi/2$ in senso antiorario (verso positivo di rotazione). Inoltre, elevando al quadrato j , per la (13) si ottiene:

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \quad (4)$$

e pertanto j^2 imprime al vettore una rotazione π nel verso positivo; elevando quindi al cubo j , tenendo conto delle (3) e (4) si ha:

$$j^3 = j \cdot j \cdot j = -j \quad (5)$$

Cioè j^3 fa ruotare il vettore rotazione di $3\pi/2$ nel senso positivo delle rotazioni (figura 3).

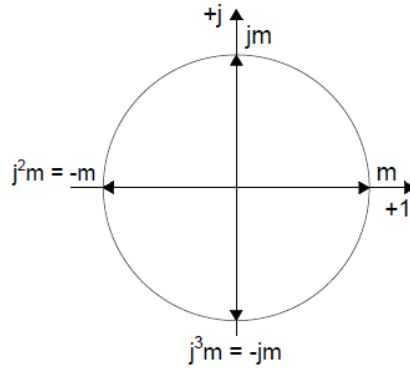


Figura 3 – Rotazioni determinate dall'operatore j

Con riferimento alla figura 1, le componenti reale (a_1) e immaginaria (a_2), possono essere espresse anche in funzione del modulo $|\bar{A}|$ e dell'argomento α del numero complesso, cioè:

$$a_1 = |\bar{A}| \cos \alpha \quad ja_2 = j |\bar{A}| \sin \alpha \quad (6)$$

Sostituendo le (6) nella (1) si ottiene:

$$\bar{A} = a_1 + ja_2 = |\bar{A}| \cos \alpha + j |\bar{A}| \sin \alpha = |\bar{A}| (\cos \alpha + j \sin \alpha) \quad (7)$$

La (7) esprime il vettore $\bar{A}$ in **forma trigonometrica**.

Ricordando la formula di Eulero:

$$e^{\pm \alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha \quad (8)$$

la (7) diventa:

$$\bar{A} = |\bar{A}| (\cos \alpha + j \sin \alpha) = |\bar{A}| e^{j\alpha} \quad (9)$$

che costituisce la **forma esponenziale** del vettore $\bar{A}$.

Qualunque sia la sua forma, un numero complesso è sempre individuato da due parametri: la componente reale e quella immaginaria nella forma binomia, il modulo $|A|$ e l'argomento α nelle forma trigonometrica ed esponenziale.

Un numero complesso può quindi essere rappresentato da una qualsiasi delle tre forme analizzate; il passaggio dall'una all'altra è effettuata mediante le equazioni (16) (forma trigonometrica ed esponenziale $\rightarrow$ forma binomia) e (12) (Forma binomia $\rightarrow$ forma trigonometrica ed esponenziale).

Ai fini del calcolo simbolico è infine utile introdurre il concetto di **coniugato**.

Considerando un numero complesso $\bar{A} = a_1 + ja_2 = |\bar{A}| e^{j\alpha}$, il coniugato di $\bar{A}$ (che si indica con $\underline{\underline{A}}$) è il numero complesso che ha la stessa componente reale (a_1), componente immaginaria ($-a_2$), modulo pari a $|\bar{A}|$ e argomento $-\alpha$; si ha infatti:

$$|\bar{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{A}}| &= \sqrt{a_1^2 + (-a_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\bar{A}| \\ \arg \underline{\underline{A}} &= \arctg \frac{-a_2}{a_1} = -\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Il coniugato $\underline{\underline{A}}$ di un numero complesso $\bar{A}$ è quindi l'immagine speculare, rispetto all'asse reale, di $\bar{A}$ (figura 4).

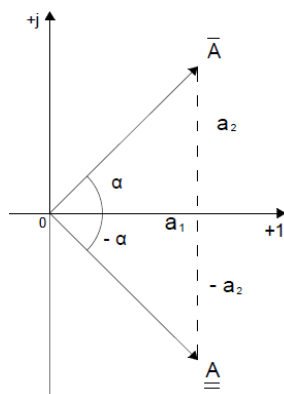


Figura 4 – Coniugato del numero complesso $\underline{A}$

Esempio 1

Dato il seguente numero complesso:

$$\underline{\bar{A}} = 4 + j3$$

determinarne:

- 1) il modulo;
- 2) l'argomento;
- 3) la forma esponenziale;
- 4) la forma trigonometrica
- 5) il complesso coniugato in forma binomia.

Soluzione

- 1) Per la prima delle (12) il modulo risulta:

$$|\underline{\bar{A}}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

- 2) Per la seconda delle (12), l'argomento vale:

$$\arg \underline{\bar{A}} = \alpha = \arctg \frac{a_2}{a_1} = \arctg \frac{3}{4} = 37^\circ$$

- 3) La forma esponenziale per la (19) risulta:

$$\underline{\bar{A}} = |\underline{\bar{A}}| e^{j\alpha} = 5e^{j37}$$

- 4) Per la (17) la forma trigonometrica è:

$$\underline{\bar{A}} = |\underline{\bar{A}}| (\cos \alpha + j \sin \alpha) = 5(\cos 37 + j \sin 37)$$

- 5) La forma binomia del complesso coniugato di $\underline{\bar{A}}$ risulta:

$$\underline{\underline{A}} = 4 - j3$$

3. Operazioni fondamentali con i numeri complessi

Verranno ora illustrate le più importanti operazioni che possono essere effettuate con i numeri complessi

3.1 Somma di numeri complessi

Dati i numeri complessi $\underline{\bar{A}} = a_1 + ja_2$ e $\underline{\bar{B}} = b_1 + jb_2$, la loro somma è un numero complesso $\underline{\bar{S}}$ che ha come parte reale e parte immaginaria la somma rispettivamente delle parti reali e delle parti immaginarie di $\underline{\bar{A}}$ e $\underline{\bar{B}}$, (figura 5), cioè:

$$\underline{\bar{S}} = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) \quad (12)$$

Per le (2) il modulo e l'argomento di $\underline{\bar{S}}$ valgono:

$$|\underline{\bar{S}}| = \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \quad \arg \underline{\bar{S}} = \arctg \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = \alpha \quad (13)$$

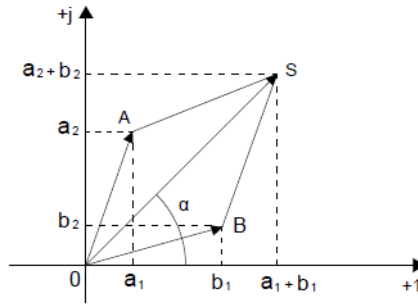


Figura 5 – Rappresentazione grafica della somma di due numeri complessi

3.2 Differenza di due numeri complessi

Dati i numeri complessi $\bar{A} = a_1 + ja_2$ e $\bar{B} = b_1 + jb_2$, la loro differenza è un numero complesso $\bar{D}$ che ha come parte reale e parte immaginaria la differenza rispettivamente delle parti reali e delle parti immaginarie di $\bar{A}$ e $\bar{B}$ (figura 6), cioè:

$$\bar{D} = (a_1 - b_1) + j(a_2 - b_2) \quad (14)$$

Per le (2) il modulo e l'argomento di $\bar{D}$ valgono:

$$|\bar{D}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad \arg \bar{D} = \arctg \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = \alpha \quad (15)$$

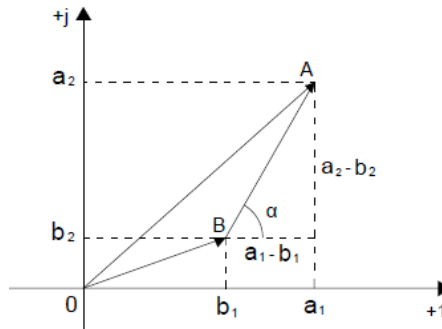


Figura 6 – Rappresentazione grafica della differenza di due numeri complessi

3.3 Prodotto per una costante

Il prodotto di un numero complesso $\bar{A}$ per una quantità costante K (numero reale) è un numero complesso $\bar{C}$ che ha modulo K volte quello di $\bar{A}$ e stesso argomento (figura 7).

Se $\bar{A}$ è espresso in forma esponenziale ($\bar{A} = |\bar{A}| e^{j\alpha}$) il prodotto per la costante K è molto semplice; infatti si ha:

$$\bar{C} = K \cdot \bar{A} = K |\bar{A}| e^{j\alpha} \quad (16)$$

e quindi:

$$|\bar{C}| = K |\bar{A}| \quad \arg \bar{C} = \alpha \quad (17)$$

Nel caso in cui $\bar{A}$ sia rappresentato in forma binomia (figura 14):

$$\bar{A} = a_1 + ja_2 \quad (18)$$

si ha:

$$\bar{C} = K \cdot \bar{A} = K(a_1 + ja_2) = Ka_1 + jKa_2 \quad (19)$$

e quindi, tenendo conto delle (2):

$$|\bar{C}| = \sqrt{K^2 a_1^2 + K^2 a_2^2} = \sqrt{K^2 (a_1^2 + a_2^2)} = K \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = K |\bar{A}| \quad \arg \bar{C} = \arctg \frac{Ka_2}{Ka_1} = \arctg \frac{a_2}{a_1} = \alpha \quad (20)$$

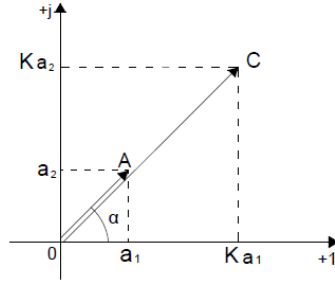


Figura 7 – Rappresentazione grafica del prodotto di un numero complesso per una costante K

Per il calcolo del prodotto di un numero complesso per una costante è evidente che la forma più conveniente è quella esponenziale.

3.4 Prodotto di due numeri complessi

Il prodotto di due numeri complessi $\bar{A}$ e $\bar{B}$ è un numero complesso $\bar{P}$ che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti di $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Se $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono espressi in forma esponenziale ($\bar{A} = |\bar{A}| e^{j\alpha}$ e $\bar{B} = |\bar{B}| e^{j\beta}$) il prodotto è molto semplice da eseguire, poiché per le regole delle potenze si ha:

$$\bar{P} = \bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}| e^{j\alpha} |\bar{B}| e^{j\beta} = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| e^{j(\alpha+\beta)} = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| e^{j\gamma} \quad (21)$$

e quindi:

$$|\bar{P}| = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \quad (22)$$

$$\arg \bar{P} = \gamma = \alpha + \beta \quad (23)$$

Se invece $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono espressi in forma binomia ($\bar{A} = a_1 + ja_2$ e $\bar{B} = b_1 + jb_2$), occorre sviluppare il prodotto:

$$\bar{P} = \bar{A} \cdot \bar{B} = (a_1 + ja_2)(b_1 + jb_2) = a_1b_1 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2a_2b_2 \quad (24)$$

Tenendo conto della (4) ($j^2 = -1$) e delle (2), raccogliendo le parti reali e quelle immaginarie, si ha:

$$\bar{P} = a_1b_1 - a_2b_2 + j(a_1b_2 + a_2b_1) \quad (25)$$

e quindi:

$$|\bar{P}| = \sqrt{(a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} \quad \arg \bar{P} = \arctg \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1b_1 + a_2b_2} \quad (26)$$

Anche in questo caso la forma più conveniente per il calcolo del prodotto è quella esponenziale.

3.5 Rapporto di due numeri complessi

Il rapporto di due numeri complessi $\bar{A}$ e $\bar{B}$ è un numero complesso $\bar{R}$ che ha per modulo il rapporto dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti di $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Se $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono espressi in forma esponenziale ($\bar{A} = |\bar{A}| e^{j\alpha}$ e $\bar{B} = |\bar{B}| e^{j\beta}$) applicando le regole delle potenze si ottiene facilmente:

$$\bar{R} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{|\bar{A}| e^{j\alpha}}{|\bar{B}| e^{j\beta}} = \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}|} e^{j(\alpha-\beta)} = \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}|} e^{j\gamma} \quad (27)$$

e quindi:

$$|\bar{R}| = \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}|} \quad \arg \bar{R} = \gamma = \alpha - \beta \quad (28)$$

S, invece $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono espressi in forma binomia ($\bar{A} = a_1 + ja_2$ e $\bar{B} = b_1 + jb_2$), si ha:

$$\bar{R} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{a_1 + ja_2}{b_1 + jb_2} \quad (29)$$

Anche se la (29) rappresenta un numero complesso, per determinarne il modulo e l'argomento occorre trasformarla nella forma binomia, con la parte reale distinta da quella immaginaria (del tipo $c_1 + jc_2$).

Al riguardo è utilizzata un'operazione, detta di **razionalizzazione**, che rende il denominatore del rapporto una quantità reale.

Operativamente la razionalizzazione si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore della (29) per il complesso coniugato del denominatore; essendo il denominatore $b_1 + jb_2$, il suo complesso coniugato è $b_1 - jb_2$ e quindi si ha:

$$\bar{R} = \frac{\bar{A}}{B} = \frac{(a_1 + ja_2)(b_1 - jb_2)}{(b_1 + jb_2)(b_1 - jb_2)} \quad (30)$$

Svolgendo i prodotti al numeratore e denominatore e tenendo conto che:

$$\begin{aligned} j^2 &= -1 & (\text{equazione 4}) \\ (x+y)(x-y) &= x^2 - y^2 & (\text{prodotto notevole}) \end{aligned} \quad (31)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{\bar{A}}{B} = \frac{(a_1 + ja_2)(b_1 - jb_2)}{(b_1 + jb_2)(b_1 - jb_2)} = \frac{a_1b_1 - ja_1b_2 + ja_2b_1 - j^2a_2b_2}{b_1^2 - j^2b_2^2} \\ &= \frac{(a_1b_1 + a_2b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2)}{b_1^2 + b_2^2} + j \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)}{b_1^2 + b_2^2} \end{aligned} \quad (32)$$

e quindi:

$$|\bar{R}| = \sqrt{\left[\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} \right]^2 + \left[\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2} \right]^2} \quad (33)$$

$$\arg \bar{R} = \arctg \frac{\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2}}{\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2}} = \arctg \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1b_1 + a_2b_2} \quad (34)$$

Anche in questo caso la forma più conveniente per il calcolo del rapporto è quella esponenziale.

3.6 Elevazione a potenza

Un numero complesso $\bar{A}$ elevato alla n-esima potenza è un numero complesso che ha come modulo il modulo $\bar{A}$ elevato ad n e come argomento l'argomento di $\bar{A}$ moltiplicato n .

Se $\bar{A}$ è espresso in forma esponenziale ($\bar{A} = |\bar{A}| e^{j\alpha}$) applicando le regole delle potenze si ottiene facilmente:

$$(\bar{A})^n = (|\bar{A}| e^{j\alpha})^n = |\bar{A}|^n e^{jn\alpha} = |\bar{A}|^n e^{j\gamma} \quad (35)$$

e quindi:

$$|(\bar{A})^n| = |\bar{A}|^n \quad \arg |(\bar{A})^n| = \gamma = n\alpha \quad (36)$$

Nel caso $\bar{A}$ sia espresso in forma binomia ($\bar{A} = a_1 + ja_2$), il calcolo di $\bar{A}^n$ è più complesso, in quanto occorre elevare a potenza un binomio:

$$(\bar{A})^n = (a_1 + ja_2)^n \quad (37)$$

3.7 Estrazione di radice

La radice n-esima di un numero complesso $\bar{A}$ è un numero complesso che ha per modulo la radice n-esima di $\bar{A}$ e per argomento l'argomento di $\bar{A}$ diviso per n .

Se $\bar{A}$ è espresso in forma esponenziale ($\bar{A} = |\bar{A}| e^{j\alpha}$), applicando le regole delle potenze si ottiene:

$$\sqrt[n]{\bar{A}} = (\bar{A})^{1/n} = (|\bar{A}| e^{j\alpha})^{1/n} = |\bar{A}|^{1/n} e^{j\alpha/n} = \sqrt[n]{|\bar{A}|} = e^{j\alpha/n} = \sqrt[n]{|\bar{A}|} e^{j\gamma} \quad (38)$$

e quindi:

$$|\sqrt[n]{\bar{A}}| = \sqrt[n]{|\bar{A}|} \quad \arg \sqrt[n]{\bar{A}} = \gamma = \frac{\alpha}{n} \quad (39)$$

Esempio 3

Dati i numeri complessi:

$$\bar{A} = 2 + j3 \qquad \bar{B} = 4 - j7$$

determinarne:

- 1) il modulo e l'argomento della somma ;
- 2) il modulo e l'argomento della differenza;
- 3) il modulo e l'argomento del prodotto;
- 4) il modulo e l'argomento del rapporto.

Soluzione

- 1) La somma di $\bar{A}$ e $\bar{B}$ vale:

$$\bar{A} + \bar{B} = 2 + j3 + 4 - j7 = 6 - j4$$

Il modulo e l'argomento di $\bar{A} + \bar{B}$ risultano:

$$|\bar{A} + \bar{B}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7,21$$

$$\arg(\bar{A} + \bar{B}) = \arctg -\frac{4}{6} = -33^\circ$$

- 2) La differenza di $\bar{A}$ e $\bar{B}$ vale:

$$\bar{A} - \bar{B} = 2 + j3 - (4 - j7) = 2 + j3 - 4 + j7 = -2 + j10$$

Il modulo e l'argomento di $\bar{A} - \bar{B}$ risultano:

$$|\bar{A} - \bar{B}| = \sqrt{(-2)^2 + 10^2} = 10,19$$

$$\arg(\bar{A} - \bar{B}) = \arctg -\frac{10}{2} = -79^\circ$$

- 3) Per determinare il prodotto conviene convertire $\bar{A}$ e $\bar{B}$ in forma esponenziale; al riguardo occorre calcolare il modulo e l'argomento di $\bar{A}$ e $\bar{B}$:

$$|\bar{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,60 \qquad \arg \bar{A} = \alpha = \arctg \frac{3}{2} = 56^\circ$$

$$|\bar{B}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = 8,06 \qquad \arg \bar{B} = \alpha = \arctg -\frac{7}{4} = -60^\circ$$

Per la (9) la forma esponenziale di $\bar{A}$ e $\bar{B}$ risulta:

$$\bar{A} = |\bar{A}| e^{j\alpha} = 3,60e^{j56^\circ} \qquad \bar{B} = |\bar{B}| e^{j\alpha} = 8,06e^{-j60^\circ}$$

Per la (21) il prodotto $\bar{A} \cdot \bar{B}$ risulta pertanto:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 3,60e^{j56^\circ} \cdot 8,06e^{-j60^\circ} = 29,01e^{-j4^\circ}$$

E quindi si ha:

$$|\bar{A} \cdot \bar{B}| = 29,01 \qquad \arg \bar{A} \cdot \bar{B} = 4^\circ$$

- 4) Anche per calcolare il rapporto conviene utilizzare la forma esponenziale di $\bar{A}$ e $\bar{B}$ determinata nel punto precedente; in tal caso risulta:

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{3,60e^{j56^\circ}}{8,06e^{-j60^\circ}} = 0,446e^{j116^\circ}$$

e quindi per le (28) si ha:

$$|\frac{\bar{A}}{\bar{B}}| = 0,446 \qquad \arg \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = 116^\circ$$